# DAAD Abschlussbereicht

Till Johann

November 2019

**Abstract**

In diesem Abschlussbericht möchte ich die Erfahrungen teilen die ich im Rahmen des DAAD Forschungspraktikums erlebt habe. Ich habe drei Monate in Triest in Italien gelebt und am International Center for Theoretical Physics (ICTP) gearbeitet. Dort wurde ich von Ugo Marzolino, einem Wissenschaftler vom National Institute for Nuclear Physics (INFN) betreut. Wir haben zu zweit an einem theoretischen Projekt zur Quantenverschränkung bei identischen Teilchen gearbeitet.

## 1 Reise

### 1.1 Kontaktaufnahme

Ich hatte von Anfang an einen guten Kontakt zu meinem Betreuer Ugo. Für die Bewerbung hatte ich ein Skype Interview mit ihm geführt und danach haben wir alle wichtigen Dinge über Email geklärt. Die Kommunikation lief schnell und locker.

### 1.2 Wohnungssuche

Die Wohnungssuche verlief zunächst etwas schwierig, da viele italienischen Internetseiten sowie Facebook Gruppen nur in italienischer Sprache angeboten wurden. Außerdem werden die meisten Apartments nicht für einen so kurzen Zeitraum vermietet. Dies führte dazu dass ich mich auf AirBnb umsah, und dort ein gutes Zimmer in einer WG für 3 Monate buchen konnte.

### 1.3 Anreise

Am Anreisetag fuhr ich mit der Bahn nach Frankfurt und Flog von dort aus etwa 1 Stunde zum Flughafen Triest, welcher von der Stadt Triest selbst noch etwa 40 km entfernt ist. Man konnte sie jedoch gut mit der Bahn direkt vom Flughafen aus erreichen. Mein Host war sehr zuvorkommend und holte mich direkt am Bahnhof in Triest ab. Am nächsten Morgen begann der erste Tag meines Projekts.

### 1.4 Ankunft am Institut

Ich erreichte das ICTP, welches etwas außerhalb von Triest liegt mit dem Bus. Dort wurde ich herzlich von meinem Betreuer Ugo und anderen Postdocs im Büro aufgenommen. Nachdem einige organisatorische Formalitäten erledigt waren, gab Ugo mir eine Vorlesung über die wichtigsten Grundlagen im Zusammenhang mit Verschränkung bei unterscheidbaren Teilchen. Wir unterhielten uns unter anderem über die Ordnung die durch Entropie als maß für Verschränkung erreicht wird, und darüber das man Verschränkung als Ressource benutzen kann. Hat man eine gewisse Anzahl verschränkter Teilchen so kann man deren Zustände mit lokalen Operationen (also solche, die nur Zugriff auf einen Teil der Teilchen haben) nur in Zustände umwandeln die weniger oder gleich viel Verschränkung besitzen. Die erste Woche verbrachte ich dann damit, Ugo's neues Paper zu studieren, welches sich noch im preprint Stadium befand und eine wichtige Grundlage für mein Projekt bildete.

## 2 Aktivitäten

Neben dem Forschungsprojekt hatte ich die Gelegenheit einige andere Aktivitäten in Triest zu unternehmen. Im Juli wurden in der Nähe meines Insituts die Junior Quantum Days abgehalten. 3 Tage lang wurden morgens Vorlesungen von Professoren zum Thema Quantenmechanik gegeben. Nach einer Kaffepause stellten dann diverse Doktoranden und Postdocs ihre Forschungsprojekte vor. Obwohl die Vorstellungen schon etwas kompliziert waren, konnte ich viel davon mitnehmen. Besonders interessant war zu sehen welche Methoden und Konzepte in der aktuellen Forschung gebraucht werden. Am ende das Tages fand dann noch eine Poster Session statt.

Abgesehen von akademischen Aktivitäten verbrachte ich meine Zeit auch damit, die Umgebung und die Stadt zu Erkunden. Es gibt in Triest sehr schöne Wanderwege von denen aus man eine tolle Sicht auf das Meer hat. Man kann auch durch den Wald zur nahegelegenden Wallfahrtskirche Monte Grisa wandern. Außerdem besichtige ich die Grotta Gigante, welche mit einer Deckenhöhe von 98 Metern die größte öffentlich Zugängliche Tropfsteinhöhle der Welt ist.

Während des gesamten Aufenthalts hatte ich einen guten Kontakt zu den Wissenschaftlern in Ugo's Umfeld. Wir gingen oft zusammen Mittagessen und Kaffee trinken, gelegentlich auch abends zusammen in ein Restaurant.

## 3 Forschungsprojekt (Fachlicher Teil)

Gegenstand des Projekts war die Quantenverschränkung von identischen Teilchen. Im Gegensatz zu unterscheidbaren Teilchen gibt es hier keine einheitliche Definition.

## 3.1 Unterscheidbare Teilchen

In der Quantenmechanik werden die Zustände eines Teilchens durch Vektoren in einem Hilbertraum $\mathbf{H}$ dargestellt. Dieser enthält alle möglichen Zustände des Teilchens. Die Zustände eines Systems aus zwei Teilchen, werden durch das Tensorprodukt der Hilberträume der Einzelteilchen aufgespannt. Die Definition von Verschränkung bei zwei unterscheidbaren Teilchen lautet dann

**Definition 1** (Unterscheidbar-Verschränkung)**.** *Verschränkte Zustände sind*

$$|\Psi_{12}\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \tag{1}$$

*Alle anderen Zustände sind separabel.*

Hierbei ist $|\Psi_{12}\rangle \in \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$ der Gesamtzustand beider Teilchen, und $|\psi_1\rangle \in \mathbf{H}$ ein Einteilchen-Zustand. In nicht-verschränkten Zuständen, welche man separabel nennt, hat jedes einzelne Teilchen im System einen vollständig charakterisieren Zustand. Sind die Teilchen verschränkt, so ist dies nicht mehr der Fall. Das bedeutet dass der Gesamtzustand des Systems bekannt ist, die Einzelzustände hingegen eine Informationslücke aufweisen. Diese Definition ist kompatibel mit weiteren wichtigen Eigenschaften. Sie sind, neben der vorher erwähnten Möglichkeit, Verschränkung als Informations-Ressource anzusehen, die Präsenz von nicht-lokalen Korrelationen in verschränkten Zuständen und die Abwesenheit dieser Korrelation in separablen Zuständen.
Erwartungswerte von sog. lokalen Operatoren $O_{12} = O_1 \otimes \mathbf{1}$ oder $Q_{12} = \mathbf{1} \otimes O_2$, die nur auf eins der Teilchen wirken, faktorisieren in verschränken Zuständen nicht :

$$\langle \Psi_{12}|O_{12}Q_{12}|\Psi_{12}\rangle \neq \langle \Psi_{12}|O_{12}|\Psi_{12}\rangle\langle \Psi_{12}|Q_{12}|\Psi_{12}\rangle$$

Ist der Zustand jedoch separabel, so faktorisiert der Erwartungswert für alle möglichen lokalen Operatoren. Zu beobachten ist hier, dass die lokalen Operatoren kommutierende sub-Algebras bilden. Verknüpft man lokale Operatoren durch Addition oder Hintereinanderausführung, so sind sie immernoch lokal. Außerdem kommutieren Teilchen 1 - lokale Operatoren immer mit Teilchen 2 - lokale Operatoren, was notwendig dafür ist, dass man Messungen an den einzelnen Teilchen durchführen kann, die sich nicht gegenseitig beeinflussen. Diese Eigenschaften führen dazu, dass man mit lokalen Operatoren keine Verschränkung erzeugen kann. Um verschränkt zu werden, müssen Teilchen in direkten Kontakt miteinander kommen und wechselwirken.

## 3.2 Identische Teilchen

Bei identischen Teilchen kann man aber dieselbe Prozedur nicht mehr vornehmen. Hindernis ist das Pauli-Prinzip, welches besagt dass Vielteilchenzustände von Bosonen(Fermionen) symmetrisch(antisymmetrisch) unter Austausch der Teilchen sein müssen. Dies schränkt die möglichen Zustände ein und auch die erlaubten Operatoren. Letztere müssen mit dem Teilchen-Vertauschungsoperator

$$T(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle \tag{2}$$

kommutieren und daher sind lokale Operatoren die nur auf ein einzelnes Teilchen wirken nicht mehr zulässig. Daher gibt es keine "natürliche" Möglichkeit, Verschränkung von identischen Teilchen zu definieren. Stattdessen existieren mehrere Definitionen in der Literatur, die Alle verschiedene vor- und Nachteile haben. Mein Projekt war nun, für zwei häufig genutzte Definitionen herauszufinden ob man sub-Algebras definieren kann, die die Eigenschaften lokaler Operatoren erfüllen, so wie das bei unterscheidbaren Teilchen der Fall ist. Motiviert vom Fall unterscheidbarer Teilchen verlangen wir folgende Eigenschaften für Lokalität:

- Verschränkung kann nicht lokal erzeugt werden. Lokale Operatoren müssen daher separable Zustände auf andere separable Zustände abbilden.
- Observablen der sub-Algebras müssen unabhängig voneinander gemessen werden können. Daher müssen Operatoren aus verschiedenen sub-Algebras kommutieren.
- Nicht-lokale Korrelationen darf es nur in verschränkten Zuständen geben. Erwartungswerte von Produkten von lokalen Operatoren müssen immer faktorisieren.

Die erste Definition von Verschränkung bei identischen Teilchen lautet

**Definition 2** (I-Verschränkung)**.** *Separabel-I Zustände sind*

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \tag{3}$$

*Alle anderen Zustände sind I-verschränkt.*

Diese "naive" Definition ist die direkte Übertragung der Definition für unterscheidbare Teilchen. Der Unterschied ist jedoch, dass bei identischen Teilchen nur symmetrische (antisymmetrische) Zustände erlaubt sind. Daher sind die einzigen separablen Zustände solche, bei denen beide Einteilchenzustände im Tensorprodukt gleich sind. Dies beschränkt außerdem die Diskussion von I-Verschränkung auf Bosonen, da es aufgrund der Antisymmetrie keine I-separablen Fermionen Zustände geben kann.
In der Basis

$$|\phi_0\rangle = |0\rangle|0\rangle \tag{4}$$

$$|\phi_1\rangle = |1\rangle|1\rangle \tag{5}$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{6}$$

kann ein beliebiger I-separabler Zustand geschrieben werden als

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)^{\otimes 2} = c_0^2|\phi_0\rangle + c_1^2|\phi_1\rangle + \sqrt{2}c_0c_1|\phi_2\rangle \tag{7}$$

$|\phi_0\rangle$ und $|\phi_1\rangle$ sind I-separabel, $|\phi_2\rangle$ ist I-verschränkt.
Nun suchen wir nach der allgemeinen Form von I-lokale Operatoren. Die Forderung

dass separable Zustände zu separablen Zuständen geschickt werden müssen, führt zur Form der Operatoren in der genannten Basis:

$$\begin{pmatrix} a_0^2 & a_1^2 & \sqrt{2}a_0a_1 \\ \overline{a_1}^2 & b_1^2 & \sqrt{2}\overline{a_1}b_1 \\ \sqrt{2}a_0\overline{a_1} & \sqrt{2}a_1b_1 & a_0b_1 + |a_1|^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Diese Matrix kann auf einen größeren Hilbertraum, der auch antisymmetrische Zustände enthält, ausgeweitet werden. Dieser mathematische Trick erlaubt uns zu erkennen dass I-lokale Operatoren $A$ auf $\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$ eine Tensorprodukt Gestalt annehmen:

$$A = O \otimes O, \tag{9}$$

mit der hermiteschen Matrix

$$O = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ \overline{a_1} & b_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Diese Form erlaubte uns, die Berechnung des Kommutators und der Faktorisierung zu vereinfachen. Wir stellten fest dass es keine Operatoren geben kann die alle Lokalitätskriterien erfüllen. Die naive Definition von Verschränkung enthält also keine Konsistenten Lokalitätseigenschaften. Kommen wir also zu

**Definition 3** (II-Verschränkung)**.** *II-separable Zustände sind*

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

*Oder*

$$|\Psi\rangle = \frac{|\psi\rangle \otimes |\psi^\perp\rangle + |\psi^\perp\rangle \otimes |\psi\rangle}{\sqrt{2}},$$

*alle anderen Zustände sind II-verschränkt.*

In dieser Definition sind all jene Zustände separabel, bei denen Teilchen im System vollständig charakterisierte Zustände haben, man jedoch nicht weiß welches Teilchen welchen Zustand einnimmt. Sie ist also in erster Hinsicht vielversprechend. Die Behandlung von II-Verschränkung war deutlich schwieriger als die Erste, da es hier viel mehr separable Zustände gibt. Die Forderung der Erhaltung der Separabilität durch lokale Operatoren führte uns zu acht Klassen von Matrizen. Nach Wochen ohne große Fortschritte fanden mein Betreuer und ich in gemeinsamen Diskussionen jedoch einen Trick, mit dem wir viele der Klassen loswerden konnten. Wir nutzten die Tatsache dass die Form der II-separablen Zustände als algebraische Gleichungen geschrieben werden kann. Die Bedingung dass ein Zustand die erste separable Form annimmt ist ein holomorphes Polynom

$$P(c_0, c_1) := \langle\phi_2|\psi\rangle^2 - 2\langle\phi_0|\psi\rangle\langle\phi_1|\psi\rangle = 0, \tag{11}$$

in $c_0$ und $c_1$. Die zweite Form kann charakterisiert werden durch ein weiteres Polynom

$$Q(c_0, c_1, \overline{c_0}, \overline{c_1}) := \mathrm{Tr}[\rho_1^2] - \frac{1}{2} = 0, \tag{12}$$

mit der reduzierten Dichtematrix $\rho_1$. Der Fundamentalsatz der Algebra und Wissen über die Lösungen von Polynomen, erlaubte es uns, viele der Klassen auszuschließen und die Restlichen zu vereinfachen. Danach haben wir wieder die Kommutativität von Matrizen in unterschiedlichen sub-Algebras gefordert. Dies schränkte Ihre Form zusätzlich ein. Schließlich fanden wir auch hier, dass die übrig gebliebenen II-lokalen Operatoren die Faktorisierungsbedingung nicht erfüllen können. Damit ist auch für diese Definition gezeigt dass sie keine guten Lokalitätseigenschaften hat.

# 4 Fazit

Die fachliche Arbeit konnte ich sehr eigenständig durchführen. Ugo gab mir natürlich immer einen Leitfaden, war aber dennoch offen für Vorschläge meinerseits. Unsere gemeinsamen Diskussionen waren besonders aufregend, da wir beide kreative Ideen entwickeln mussten um unsere Probleme zu lösen. So konnte ich miterleben, wie richtige, aktuelle, wissenschaftliche Arbeit abläuft. Das Forschungsprojekt war für mich in vielen Hinsichten sehr erfolgreich. Die Ergebnisse des Projekts haben wir in einem Paper festgehalten, was wir in einem wissenschaftlichen Journal veröffentlichen wollen. In den drei Monaten haben wir also einiges geschafft. Es gab natürlich auch Zeiten, in denen ich nicht so richtig voran kam. Immerhin haben wir uns mit Problemen befasst, deren Lösung eben noch nicht bekannt ist, und sogar nicht einmal bekannt ist ob es eine "einfache" Lösung gibt. In einer solchen Situation dann doch eine Lösung zu finden ist ein tolles Gefühl. Daher möchte ich mich an dieser Stelle noch bei Ugo und den Kollegen am ICTP bedanken, die mir eine sehr schöne Zeit beschert haben und natürlich beim DAAD, der mir diesen Aufenthalt ermöglicht hat.